

Überraschungen mit Wartezeitverteilungen im Pólyaschen Urnenmodell

NORBERT HENZE, KARLSRUHE, UND REIMUND VEHLING, HANNOVER

Zusammenfassung: In einem speziellen Urnenmodell von Pólya werden jeweils nach Entnahme einer Kugel diese Kugel sowie eine weitere Kugel der gleichen Farbe zurückgelegt. Bei elementaren Wartezeitproblemen in diesem Modell ergeben sich überraschende Wendungen.

1 Einleitung

Stochastik in der Schule ist derzeit von einem (meist nur vermeintlichen) Anwendungsbezug dominiert, wobei Rezepte im Vordergrund stehen und inhaltliches Verständnis auf der Strecke bleibt, siehe Henze (2018). Mit diesem Aufsatz möchten wir diesem Zustand entgegenwirken und aufzeigen, dass einfach gestellte Probleme zahlreiche Möglichkeiten für die Modellierung bereithalten und das stochastische Verständnis fördern können.

Diesem Zweck diene das folgende von Pólya (1930) zur Modellierung ansteckender Krankheiten vorgeschlagene Urnenmodell. Eine Urne enthalte r rote und s schwarze Kugeln. Es wird rein zufällig eine Kugel gezogen und diese sowie c weitere Kugeln derselben Farbe in die Urne zurückgelegt. Nach jeweils gutem Mischen wird dieser Vorgang in unabhängiger Folge wiederholt. Zieht man insgesamt n -mal, so besitzt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln die sogenannte Pólya-Verteilung, siehe Henze und Vehling (2021) oder Henze (2021), Kapitel 14. Was uns im Folgenden interessiert, ist ein *Wartezeitproblem*, und dieses auch nur im speziellen Fall $c = 1$, wobei wir zunächst $r = s = 1$ voraussetzen. Eine Urne enthalte also zu Beginn eine rote und eine schwarze Kugel. Es werden nach obigem Modus der Reihe nach solange Kugeln gezogen, bis die rote Kugel auftritt (was schon im ersten Zug erfolgen kann). Wir leiten die Verteilung der mit X bezeichneten Anzahl der dafür nötigen Züge her. Es zeigt sich, dass X zwar mit Wahrscheinlichkeit eins einen endlichen Wert annimmt, aber keinen Erwartungswert besitzt. Startet man mit einer roten Kugel und einer beliebig großen Anzahl s schwarzer Kugeln, so erscheint die (einzige) rote Kugel immer noch mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit. Legt man zu Beginn eine zweite rote Kugel in die Urne, so besitzt die Anzahl der Ziehungen bis zum Auftreten einer roten Kugel unabhängig von der Anzahl vorhandener schwarzer Kugeln einen endlichen Erwartungswert. Überraschen-

derweise ändert also eine zweite rote Kugel Entscheidendes, siehe hierzu auch Henze (2020).

2 Eine Blütenaufgabe

Die folgende Aufgabe wurde vom zweiten Autor in einem Grundkurs gestellt: Eine Urne enthält zu Beginn eine bestimmte Anzahl an roten und schwarzen Kugeln. Es wird rein zufällig eine Kugel entnommen.

- Ist diese rot, so wird diese und eine weitere rote Kugel in die Urne gelegt, und der Urneninhalt wird gut gemischt.
- Wird eine schwarze Kugel gezogen, so wird diese und eine weitere schwarze Kugel in die Urne gelegt, und der Urneninhalt wird wieder gut gemischt.

Dieser Ziehungsvorgang wird mehrfach fortgesetzt.

- a) In der Urne befinden sich zu Beginn zwei rote und drei schwarze Kugeln. Die Ziehung wird zweimal durchgeführt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
 - i) beide Kugeln rot sind,
 - ii) genau eine Kugel rot ist,
 - iii) keine Kugel rot ist.
- b) Die Ziehung wird dreimal durchgeführt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kugeln rot sind.
- c) In der Urne befinden sich rote und schwarze Kugeln, wobei es genau eine schwarze Kugel mehr gibt. Es wird zweimal gezogen. Ermitteln Sie die Anzahl an roten und schwarzen Kugeln zu Beginn, wenn die Wahrscheinlichkeit, genau zweimal eine rote Kugel zu ziehen, 20% beträgt.
- d) In der Urne befinden sich nun eine rote und eine schwarze Kugel. Wieder wird die besondere Regel beim Ziehen angewendet. Das Experiment ist beendet, wenn die gezogene Kugel rot ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man nach dem ersten (zweiten, dritten, vierten, ...) Zug fertig ist.

Obwohl Aufgaben im Umfeld von Urnenziehungen Schüler(inne)n hinlänglich bekannt sind, bereitete ih-

nen dieser ungewohnte Ziehungsmodus Schwierigkeiten, und sie trauten sich nicht, wie gewöhnlich mit einem Baumdiagramm zu starten. Einige wählten in Ermangelung von Ideen sogar den Binomialansatz, was irgendwie verständlich ist, denn in einem Grundkurs in Niedersachsen gibt es – bis auf das Ziehen ohne Zurücklegen – nur die Binomialverteilung. Scaffolding war angesagt! Es genügte letztlich der Hinweis, sich zu trauen und ein Baumdiagramm zu verwenden, um gemeinsam eine Teilwahrscheinlichkeit zu bestimmen. Danach konnten alle die Aufgabenteile selbstständig bearbeiten.

Die obige Aufgabe ist als selbst differenzierende sog. *Blütenaufgabe* mit mehreren zunehmend anspruchsvolleren Teilaufgaben zum gleichen Kontext konzipiert. Aufgabenteil c) zeigt eine Vernetzung zur Algebra (Lösung einer Bruchgleichung) auf und stellt die Strategie des Rückwärtsarbeitens in den Vordergrund. Aufgabenteil d) ist die *Blüte*. Hier wird der Fokus schon auf Wartezeitprobleme gelegt.

Die Schüler(innen) haben sich intensiv mit den Problemstellungen auseinandergesetzt und konnten insgesamt gute Ergebnisse erzielen. Beim Aufgabenteil d) – der den größten Anforderungscharakter hatte – erkannten sie das zugrunde liegende Muster, und sie waren stolz, diesen Teil gelöst zu haben. Abschließend wurde gemeinsam die folgende Problemstellung gelöst:

In der Situation von Aufgabenteil d) zählt die Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche, bis das Experiment endet. Wie groß ist $\mathbb{P}(X \geq 10)$, also die Wahrscheinlichkeit, mindestens 10 Ziehungen bis zum Ende zu benötigen (siehe Abschnitt 3)? Natürlich ist diese letzte Problemstellung anspruchsvoll. Schüler(innen) finden aber auch solche Herausforderungen motivierend. Insgesamt war der Unterricht geprägt von einer Balance zwischen Instruktion und Konstruktion. Fragt man nach dem Erwartungswert von X , so gelangt man zur harmonischen Reihe und der Erkenntnis, dass es Zufallsvariablen gibt, die keinen Erwartungswert besitzen, siehe Abschnitt 3.

3 Eine rote und eine schwarze Kugel

Wir legen die Situation von Aufgabenteil d) zugrunde. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Ziehungen, bis die rote Kugel gezogen wird. Hier stellen sich unmittelbar folgende Fragen: Welche Verteilung besitzt X ? Wird die rote Kugel mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit, also irgendwann einmal, gezogen? Welchen Erwartungswert besitzt X ?

Die erste Frage lässt sich sofort mit der ersten Pfadregel beantworten: Für jedes k tritt das Ereignis $\{X = k\}$ genau dann ein, wenn $(k - 1)$ -mal hintereinander eine schwarze und dann die rote Kugel gezogen wird. Aufgrund des Ziehungsmodus gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k(k+1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

$k = 1, 2, 3, \dots$. Abb. 1 zeigt das Stabdiagramm der Verteilung von X .

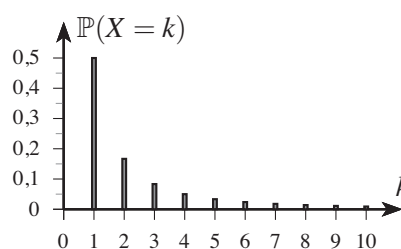


Abb. 1: Stabdiagramm der Verteilung von X

Dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich eins ist und damit die zweite Frage eine positive Antwort erfährt, kann man zum einen wie folgt einsehen: Wegen

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(hier ist die Lehrkraft als Ideengeber gefragt, die linke Seite als Differenz zweier Stammbrüche schreiben zu können) entsteht beim Summieren der Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k)$ über k von 1 bis n ein bisweilen auch als *Teleskopeffekt* bezeichneter Auslöschungseffekt, der sich in der Gleichung

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (2)$$

widerspiegelt. Da die rechte und damit auch die linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert, wird die rote Kugel in der Tat mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit gezogen.

Noch einfacher erschließt sich dieser Sachverhalt, wenn man gleich nach der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X > n\}$ fragt. Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn jeder der ersten n Züge eine schwarze Kugel ergibt, und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist nach der ersten Pfadregel gleich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > n) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Insbesondere ergibt sich $\mathbb{P}(X \geq 10) = \mathbb{P}(X > 9) = 1/10$. Abb. 2 zeigt die „Überschreitungswahrscheinlichkeiten“ $\mathbb{P}(X > n)$. Weil diese für $n \rightarrow \infty$ zu langsam gegen null konvergieren, existiert der Erwartungswert von X nicht, siehe die Überlegungen am Ende dieses Abschnitts.

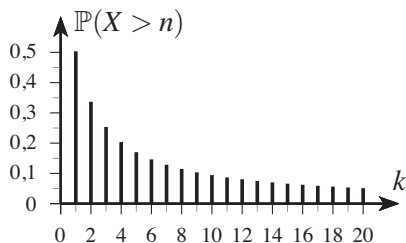


Abb. 2: Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X > n)$

Durch Übergang zum Gegenereignis folgt

$$\mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad (4)$$

was gleichbedeutend mit (2) ist.

Wir fragen nun, wie viele Züge man im Mittel wartet, bis die rote Kugel auftritt, also nach dem Erwartungswert von X . Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X=2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X=3) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

und der Tatsache, dass diese Summe über alle Grenzen wächst, besitzt X keinen Erwartungswert. Da X eine nichtnegative Zufallsvariable ist, spricht man auch davon, dass der Erwartungswert von X gleich unendlich ist. Man wartet also *im Mittel unendlich lange* auf die rote Kugel. In Abschnitt 4 zeigen wir, wie man Schülerinnen und Schülern diesen Sachverhalt „erfahrbar machen kann“.

Dass die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

bei wachsendem n irgendwann jede noch so große vorgegebene Zahl übersteigt und damit „unendlich groß ist“, können Schülerinnen und Schüler am einfachsten begreifen, indem sie sich klar machen, dass für jedes $\ell \geq 1$ die 2^ℓ Summanden

$$\frac{1}{2^\ell + 1} + \frac{1}{2^\ell + 2} + \dots + \frac{1}{2^\ell + 2^\ell}$$

jeweils durch

$$\frac{1}{2^\ell + 2^\ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\ell}$$

nach unten abgeschätzt werden können und somit in ihrer Summe mindestens $1/2$ ergeben. Folglich wird beliebig oft mindestens $1/2$ aufsummiert, sodass die Behauptung folgt.

Da X eine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable ist, kann man auch auf anderem Wege feststellen, ob der Erwartungswert von X existiert, und man ist zur Bestimmung des Erwartungswertes nicht auf die Darstellungsformel „Summe aus Wert mal Wahrscheinlichkeit“ angewiesen. Für eine allgemeine nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable Z gilt nämlich

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq j), \quad (5)$$

wobei das Gleichheitszeichen auch für den Fall, dass beide Seiten den Wert unendlich annehmen, bestehen bleibt. Nimmt Z nur die Werte $1, 2, \dots, n$ an, so können Schülerinnen und Schüler die obige Gleichheit (mit n anstelle von ∞) sofort einsehen, denn mit der Abkürzung $p_k := \mathbb{P}(Z = k)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \dots + n \cdot p_n \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n \\ &\quad + p_2 + p_3 + \dots + p_n \\ &\quad + p_3 + \dots + p_n \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + p_n \\ &= \mathbb{P}(Z \geq 1) + \mathbb{P}(Z \geq 2) + \dots + \mathbb{P}(Z \geq n). \end{aligned}$$

Ein allgemeiner Beweis verwendet die Identität

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k 1 \right) \cdot \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq j). \end{aligned}$$

Mit (3) gilt

$$\mathbb{P}(X \geq j) = \mathbb{P}(X > j-1) = \frac{1}{j},$$

sodass man beim Summieren über j direkt mit der harmonischen Reihe konfrontiert ist.

4 Ein unendlicher Erwartungswert – über Simulationen erfahrbar?

Wir haben gesehen, dass die zufällige Anzahl der Züge, bis die rote Kugel gezogen wird, einen unendlichen Erwartungswert besitzt. Wie können Schülerinnen und Schüler diesen Sachverhalt begreifen?

Hier bietet sich an, die zu Beginn von Abschnitt 3 vorliegende Situation mithilfe von Pseudozufallszahlen, die im Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind, wie folgt zu simulieren: Man wählt eine Zahl k und führt einen Zähler j ein, der von 1 bis maximal k läuft. Bezeichnet x_j die j -te erhaltene Pseudozufallszahl, so stoppt man die Simulation mit dem Wert j , falls erstmalig die Ungleichung $x_j \leq 1/(j+1)$ erfüllt ist, spätestens aber dann (und ohne einen Wert erhalten zu haben), wenn der Laufzähler auch den Wert k abgearbeitet hat. Diese Simulation wiederholt man jeweils mit einem anderen Startwert des Pseudozufallszahlengenerators n -mal.

Bezeichnet $H_{n,j}$ die Anzahl der Male, bei denen sich bei der Simulation der Wert j ergeben hat, $j \in \{1, \dots, k\}$, so können die Werte $H_{n,1}, \dots, H_{n,k}$ als (absolute) Häufigkeiten von Realisierungen der Zufallsvariablen X aufgefasst werden, wenn X einen Wert annimmt, der höchstens gleich k ist, also das Ereignis $\{X \leq k\}$ eintritt. Was passiert nun, wenn wir alle erhaltenen Werte mitteln? Da wir für jedes $j \in \{1, \dots, k\}$ $H_{n,j}$ mal den Wert j beobachtet haben und insgesamt $H_{n,1} + \dots + H_{n,k}$ Werte vorliegen, ist dieser arithmetische Mittelwert durch

$$e_{n,k} := \frac{1 \cdot H_{n,1} + 2 \cdot H_{n,2} + \dots + k \cdot H_{n,k}}{H_{n,1} + \dots + H_{n,k}}$$

gegeben. Da sich die nach Division durch n erhaltenen relativen Häufigkeiten $H_{n,j}/n$ für wachsendes n gegen die theoretischen Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = j)$ stabilisieren (Gesetz großer Zahlen!) und sich $e_{n,k}$ nicht ändert, wenn man Zähler und Nenner durch n dividiert, sollte sich $e_{n,k}$ bei wachsendem n gegen den sogenannten *bedingten Erwartungswert*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|X \leq k] &= \frac{1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + \dots + k \cdot \mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 1) + \dots + \mathbb{P}(X = k)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X \leq k)} \cdot \sum_{j=1}^k j \cdot \mathbb{P}(X = j) \end{aligned}$$

von X unter der Bedingung $X \leq k$ stabilisieren. Nach (4) gilt $\mathbb{P}(X \leq k) = k/(k+1)$, und mit (1) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|X \leq k] &= \frac{k+1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j+1} \\ &= \frac{k+1}{k} (H_{k+1} - 1), \end{aligned}$$

wobei allgemein $H_\ell = 1 + 1/2 + \dots + 1/\ell$ die ℓ -te harmonische Zahl bezeichnet. Wegen $H_n \approx \ln n + C$ mit der Euler-Mascheroni-Konstanten $C = 0.57721\dots$ (für eine Herleitung auf Kursstufenniveau siehe Henze (2019)) folgt

$$\mathbb{E}[X|X \leq k] \approx \ln k + C - 1. \quad (6)$$

Abb. 3 zeigt die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X|X \leq k]$ sowie ein Schaubild der in (6) gegebenen approximativen Werte.

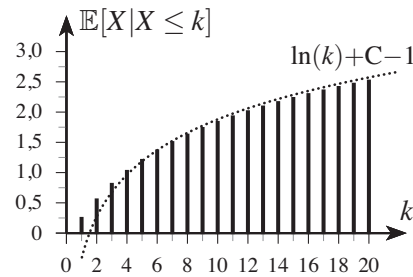


Abb. 3: Bedingte Erwartungswerte und Approximation (6)

Für das Zahlenbeispiel $k = 10000$ ergibt sich der auf zwei Nachkommastellen gerundete Wert 8,79. Erhalten wir also die Information, dass die rote Kugel bis spätestens zum zehntausendsten Zug gezogen wurde, so tritt sie im Mittel nach knapp 9 Zügen, also sehr früh, auf.

5 Eine rote und s schwarze Kugeln

Wir nehmen jetzt an, dass die Urne zu Beginn eine rote und s schwarze Kugeln enthält, wobei zunächst $s \geq 2$ vorausgesetzt sei. Wird jetzt (unter Beibehaltung der Ziehungsmodalitäten) die rote Kugel immer noch mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit gezogen? Wenn man Schülerinnen und Schüler das Problem mit $s = 1000$ oder $s = 1000000$ stellen würde, würden sie vielleicht spontan antworten, dass diese Wahrscheinlichkeit immer kleiner wird, je größer s ist, und dass sie vielleicht bei wachsendem s gegen null konvergiert. Bezeichnet X_s die Anzahl der Züge, bis die rote Kugel erscheint, so würden Schülerinnen und Schüler vielleicht erst den Spezialfall $s = 2$ angehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Kugel in keinem der ersten k Züge auftritt, was gleichbedeutend mit dem Eintreten des Ereignisses $\{X_2 > k\}$ ist, berechnet sich nach der ersten Pfadregel zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 > k) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{2}{k+2}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses, dass die rote Kugel spätestens nach k Zügen auftritt, ist demnach

$$\mathbb{P}(X_2 \leq k) = 1 - \frac{2}{k+2}.$$

Da dieser Ausdruck für $k \rightarrow \infty$ gegen eins konvergiert, wird klar, dass auch in diesem Fall die rote Kugel mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit gezogen wird.

Was passiert nun bei allgemeinem s ? Da die Urne zu Beginn eine rote und s schwarze Kugeln enthält, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die rote Kugel in keinem der ersten k Züge auftritt, also das Ereignis $\{X_s > k\}$ eintritt, nach der ersten Pfadregel gleich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_s > k) &= \frac{s}{s+1} \cdot \frac{s+1}{s+2} \cdot \dots \cdot \frac{s+k-2}{s+k-1} \cdot \frac{s+k-1}{s+k} \\ &= \frac{s}{s+k}. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Gegenereignis liefert jetzt

$$\mathbb{P}(X_s \leq k) = 1 - \frac{s}{s+k}, \quad k \geq 1. \quad (7)$$

Obwohl diese Wahrscheinlichkeit für festes k bei wachsendem s gegen null konvergiert, strebt sie – und das ist der springende Punkt – bei festem, noch so großen s beim Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ gegen eins. An dieser Stelle dämmert es Schülerinnen und Schülern vielleicht, welche „Kraft“ hinter dem Unendlichkeitsbegriff steht. Die Sprechweise „in endlicher Zeit“ bedeutet ja gerade, dass man beliebig viele Ziehungen machen darf.

Natürlich kann man aus (7) durch Differenzbildung die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_s = k)$, $k \geq 2$, zu

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_s = k) &= \mathbb{P}(X_s \leq k) - \mathbb{P}(X_s \leq k-1) \\ &= 1 - \frac{s}{s+k} - \left(1 - \frac{s}{s+k-1}\right) \\ &= \frac{s}{(s+k-1)(s+k)} \end{aligned}$$

erhalten. Diese Darstellung gilt auch für $k = 1$, und sie enthält den Spezialfall $s = 1$.

Man mache sich klar, dass die Ausgangssituation dieses Abschnitts, nämlich eine Urne mit einer roten und s schwarzen Kugeln, auch in der Situation von Abschnitt 3 auftritt, wenn die ersten $s-1$ Züge jeweils eine schwarze Kugel ergaben, also das Ereignis $\{X \geq s\}$ eintritt. Die Ausgangssituation dieses Abschnittes ergibt sich also in Abschnitt 3 unter der Bedingung $\{X \geq s\}$. Da für jedes $j \geq 1$ das Eintreten des Ereignisses $\{X = s+j-1\}$ unter obiger Bedingung aus stochastischer Sicht gleichbedeutend damit ist, dass das Ereignis $\{X_s = j\}$ eintritt, gilt

$$\mathbb{P}(X_s = j) = \mathbb{P}(X = s+j-1 | X \geq s).$$

Da allgemein die mit $\mathbb{P}(A|B)$ bezeichnete bedingte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eintritt, durch

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

definiert ist, und weil wegen $j \geq 1$ aus dem Ereignis $\{X = s+j-1\}$ das Ereignis $\{X \geq s\}$ folgt, ergibt sich

$$\mathbb{P}(X_s = j) = \frac{\mathbb{P}(X = s+j-1)}{\mathbb{P}(X \geq s)}, \quad j \geq 1. \quad (8)$$

Diese begrifflich hergeleitete Gleichung zeigt, dass die Verteilung von X_s gleich der bedingten Verteilung von $X - s + 1$ unter der Bedingung $X \geq s$ ist. Natürlich kann man Gleichung (8) auch durch Einsetzen mithilfe von (1) (mit $k = s+j-1$) und wegen $\mathbb{P}(X \geq s) = \mathbb{P}(X > s-1)$ aus (3) (mit $n = s-1$) herleiten.

6 Eine zweite rote Kugel bewirkt Wunder

Wir legen jetzt zwei rote und eine schwarze Kugel in die Urne. Wieder interessiert uns die jetzt mit Y bezeichnete Anzahl der Züge, bis eine der beiden roten Kugeln gezogen wird. Dabei legen wir wie bisher beim Ziehen einer schwarzen Kugel diese sowie eine weitere schwarze Kugel in die Urne zurück. Das folgende, mithilfe der frei zugänglichen Statistiksoftware R erstellte Programm schätzt den Erwartungswert von Y durch eine auf 10^6 Wiederholungen fußende Simulation.

```
n <- 1000000; AnzahlZuege <- -1 : n
for (i in 1:n)
{
  Urne <- c(1, 1, 0); Anzahl <- -1
  Kugel <- sample(Urne, 1)
  while (Kugel != 1)
  {
    Urne <- c(Urne, Kugel)
    Kugel <- sample(Urne, 1)
    Anzahl <- Anzahl + 1
  }
  AnzahlZuege[i] <- Anzahl
}
```

Die Simulation in R ist sehr kompakt und fast selbstklärend. Zuerst wird die Anzahl der Simulationen festgelegt (hier: 10^6). Der Befehl `c(1,1,0)` erzeugt einen Vektor mit den Einträgen (1, 1, 0). Hierbei stehen die beiden Einsen für jeweils eine rote und die 0 für eine schwarze Kugel. Die zufällige Ziehung

genau einer Kugel aus der Urne wird mit dem Befehl $sample(Urne, 1)$ realisiert. Solange keine rote Kugel auftritt, wird die Urne mit einer zusätzlichen schwarzen Kugel (Zahl 0) gefüllt. Diese Befüllung geschieht mit dem Befehl $c(Urne, Kugel)$. Der Vektor (hier: Urne) wird mit einem weiteren Element gefüllt (hier: Kugel). Danach wird wieder gezogen, usw. Der erhaltene Mittelwert 1,995443 ist ein sehr guter Schätzwert für den Erwartungswert (der, wie wir gleich sehen werden, gleich 2 ist).

Es kann auch die maximale Wartezeit bei den 10^6 Versuchen (im konkreten Fall: 1363) ausgegeben werden. Diese große Wartezeit wird von wenigen Schülerinnen und Schülern vermutet. Weitere 10^6 Simulationen ergaben die auf jeweils vier Nachkommastellen gerundeten Schätzwerte 2,0052; 2,0031; 1,9975; 1,9935 und 1,9996 für den Erwartungswert von Y . Die jeweils maximale Anzahl der maximalen Wartezeiten betrug 1891, 1670, 1407, 1556 und 1907. Aufgrund dieser Ergebnisse liegt natürlich die Vermutung $\mathbb{E}(Y) = 2$ nahe. Zumindest für einige Lernende wirkt ein derartiges Vorgehen motivierend, diese Vermutung auch mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen. Außerdem wird eine sinnvolle Vernetzung zur Informatik hergestellt. Wir sehen in der Benutzung der Statistiksoftware R ganz allgemein ein großes Potential für den Stochastikunterricht.

Um den Erwartungswert von Y herzuleiten, betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, k mal hintereinander eine schwarze Kugel zu ziehen, also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{Y > k\}$. Mithilfe der ersten Pfadregel folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > k) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{k}{k+2} \\ &= \frac{2}{(k+1)(k+2)}, \end{aligned} \quad (9)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$. Durch Übergang zum Gegenereignis ergibt sich mit

$$\mathbb{P}(Y \leq k) = 1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

eine Formel für die Wahrscheinlichkeit, eine der beiden roten Kugeln nach spätestens k Zügen zu erhalten. Da für $k \rightarrow \infty$ Konvergenz gegen eins vorliegt, zieht man – was jetzt nicht mehr verwunderlich ist – eine der beiden roten Kugeln mit Wahrscheinlichkeit eins in endlicher Zeit. Überraschenderweise bewirkt die zweite rote Kugel, dass der Erwartungswert der

Wartezeit endlich wird, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k-1) \\ &= \frac{2}{k(k+1)} - \frac{2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{4}{k(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y = k) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Wegen

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

ist ein aus n Summanden bestehendes Anfangsstück der in (10) stehenden unendlichen Reihe aufgrund eines Auslöschungseffektes gleich $1/2 - 1/(n+2)$ und somit der Wert der unendlichen Reihe gleich $1/2$. Für den Erwartungswert von Y ergibt sich somit

$$\mathbb{E}(Y) = 2.$$

Was passiert nun, wenn wir weitere schwarze Kugeln hinzunehmen? Starten wir anfangs mit zwei roten und s schwarzen Kugeln und bezeichnen die zufällige Anzahl der Züge, bis eine der beiden roten Kugeln gezogen wird, mit Y_s , so ist zu vermuten, dass auch für allgemeines s der Erwartungswert von Y_s existiert. Zu vermuten ist auch, dass es bei zunehmender Anzahl schwarzer Kugeln im Mittel länger dauern wird, eine rote Kugel zu ziehen. Der Erwartungswert von Y_s sollte also mit s monoton wachsen. Wir wollen herausfinden, ob das der Fall ist und versuchen, hierzu Darstellung (5) gewinnbringend zu verwenden. Da das Ereignis $\{Y_s \geq j\}$ genau dann eintritt, wenn die ersten $j-1$ Züge jeweils eine schwarze Kugel hervorbrachten, folgt mit der ersten Pfadregel nach Wegkürzen von gemeinsamen Faktoren in Zähler und Nenner

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_s \geq j) &= \prod_{\ell=0}^{j-2} \frac{s+\ell}{s+\ell+2} \\ &= \frac{s(s+1)}{(s+j-1)(s+j)}, \end{aligned}$$

was sich im Spezialfall $s = 1$ auf (9) reduziert. Mithilfe von (5) ergibt sich

$$\mathbb{E}(Y) = s(s+1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(s+j-1)(s+j)}.$$

Wegen

$$\frac{1}{(s+j-1)(s+j)} = \frac{1}{s+j-1} - \frac{1}{s+j}$$

stellt sich bei der Summation auch hier ein Auslöschungseffekt ein. Dieser zeigt, dass der Wert der unendlichen Reihe gleich $1/s$ ist, und es folgt

$$\mathbb{E}(Y_s) = s + 1, \quad (11)$$

was sich mit dem Ergebnis im vorher betrachteten Spezialfall $s = 1$ deckt.

Durch folgende Überlegung kann man auch eine Rekursionsformel für $\mathbb{E}(Y_s)$ in Abhängigkeit von s herleiten. Wir betrachten den ersten Zug aus der mit 2 roten und s schwarzen Kugeln gefüllten Urne. Bezeichnen wir die Ereignisse, in diesem Zug eine rote bzw. eine schwarze Kugel zu ziehen, mit R bzw. S , so liefert die bisweilen auch als *Mittelwertsregel* bezeichnete und eine Verallgemeinerung der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit darstellende *Formel vom totalen Erwartungswert* (siehe z. B. Henze (2021), Kapitel 26) die Gleichung

$$\mathbb{E}(Y_s) = \mathbb{E}(Y_s|R) \cdot \mathbb{P}(R) + \mathbb{E}(Y_s|S) \cdot \mathbb{P}(S). \quad (12)$$

Dabei bezeichnen $\mathbb{E}(Y_s|R)$ und $\mathbb{E}(Y_s|S)$ die Erwartungswerte von Y_s unter der Bedingung R bzw. S . In Gleichung (12) unmittelbar bekannt sind $\mathbb{P}(R) = 2/(s+2)$ und $\mathbb{P}(S) = s/(s+2)$. Da unter der Bedingung R die Zufallsvariable Y_s den Wert 1 annimmt, gilt $\mathbb{E}(Y_s|R) = 1$. Um den zweiten bedingten Erwartungswert zu bestimmen, stellen wir folgende Überlegung an: Tritt im ersten Zug eine schwarze Kugel auf, so haben wir einerseits einen im Hinblick auf das Ziehen einer roten Kugel vergeblichen, mitzuzählenden Versuch gemacht, zum anderen befinden wir uns vor dem nächsten Zug in der Situation, dass die Urne jetzt neben den beiden roten Kugeln $s+1$ schwarze Kugeln enthält. Der Erwartungswert der nötigen Züge bis zum Auftreten einer roten Kugel ist dann $\mathbb{E}(Y_{s+1})$. Es gilt also

$$\mathbb{E}(Y_s|S) = 1 + \mathbb{E}(Y_{s+1}).$$

Einsetzen in (12) liefert dann nach kurzer Rechnung die Rekursionsformel

$$\mathbb{E}(Y_{s+1}) = \frac{s+2}{s} (\mathbb{E}(Y_s) - 1).$$

Mit der Anfangsbedingung $\mathbb{E}(Y_1) = 2$ folgt jetzt (11) auch induktiv aus obiger Rekursion.

7 Höhere Gesichtspunkte

Sind zu Beginn r rote und s schwarze Kugeln vorhanden, so gilt für die Anzahl X der Züge bis zum erstmaligen Auftreten einer roten Kugel

$$\mathbb{P}(X > k) = \frac{s(s+1) \cdot \dots \cdot (s+k-1)}{(s+r)(s+r+1) \cdot \dots \cdot (s+r+k-1)}$$

und somit

$$\mathbb{P}(X > k) \leq \frac{C}{k^r}$$

für eine nur von r und s abhängende Konstante C . Hieraus folgt, dass im Fall $r = 3$ auch das zweite Moment und damit die Varianz von X existiert. Allgemein existiert bei $r, r \geq 2$, roten Kugeln der Erwartungswert von X^{r-1} . Weiteres hierzu findet sich in Henze und Holmes (2019).

Danksagung: Die Autoren danken den beiden Gutachtern für wertvolle Hinweise.

Literatur

- Henze, N. (2018): Verständnisorientierter Gymnasialer Stochastikunterricht – quo vadis? *Stoch. Sch.*, 38(3), 2018, S. 12–23.
- Henze, N. (2019). Harmonische Zahlen und die Euler–Mascheroni-Konstante. Erklärvideo. DOI:10.5445/DIVA/2019-976
- Henze, N. (2020). Unerwartete Erwartungswerte beim Pólyaschen Urnenmodell. Erklärvideo. DOI:10.5445/IR/1000122643
- Henze, N., und Holmes, M.P. (2019). Curiosities regarding waiting times in Pólya’s urn model. arXiv:1911.01052.
- Henze, N. (2021): Stochastik für Einsteiger. 13. Auflage. Heidelberg. Springer Spektrum.
- Henze, N., und Vehling, R. (2021): Das Pólyasche Urnenmodell – ein Blick über den Tellerrand der Binomialverteilung. *Stoch. Sch.* 41(2).
- Pólya, G. (1930): Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales le l’I.H.P.* 1 (1930), S. 117–161.

Anschriften der Verfasser:

Prof. i.R. Dr. Norbert Henze
 KIT Distinguished Senior Fellow
 Institut für Stochastik
 Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
 Englerstr. 2
 76131 Karlsruhe
 Henze@kit.edu

Reimund Vehling
 Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien
 Hannover I
 vehling@icloud.com